Pulse Amplitude Modulation (PAM)

1 Definizione

La trasmissione di una sequenza di numeri $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ mediante un'onda PAM consiste nel generare, a partire dalla sequenza $\{a_k\}$ il segnale a tempo continuo

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g_T(t - kT_s). \tag{1}$$

Tale segnale viene comunemente denominato onda PAM. Il parametro T_s è il periodo di simbolo. Il numero di simboli trasmessi in un secondo è quindi $1/T_s$. La funzione $g_T(t)$ che appare in (1) è la cosiddetta *funzione sagomatrice* dell'onda PAM. Tipicamente, $g_T(t)$ è un segnale ad energia finita. Il segnale $u(t)$ in (1) può essere interpretato come l'uscita di un filtro avente risposta impulsiva $g_T(t)$ ed ingresso

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT_s), \tag{2}$$

dove $\delta(t)$ indica l'impulso matematico. In ricezione, supponendo che il canale di trasmissione sia ideale, l'onda PAM transita attraverso un filtro $g_R(t)$. Indicando con $g(t)$ la convoluzione tra $g_T(t)$ e $g_R(t)$, il segnale all'uscita del filtro in ricezione, corrispondente al segnale di ingresso (1) è

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t - kT_s). \tag{3}$$

2 Scelta delle risposte impulsive dei filtri in trasmissione e ricezione

Le risposte impulsive dei filtri $g_T(t)$ e $g_R(t)$ sono scelte in modo da massimizzare il rapporto segnale/rumore sul singolo simbolo ed eliminare l'interferenza intersimbolica, o Inter-Symbol Interference (ISI). Per soddisfare entrambi questi criteri, la scelta delle due funzioni avviene seguendo i due criteri seguenti:

1. *Massimo SNR sul simbolo*

   In presenza di rumore bianco additivo, il rapporto SNR all'uscita del filtro avente risposta impulsiva $g_R(t)$ è massimo se
   $$g_R(t) = g_T^*(t_0 - t), \tag{4}$$
   dove t_0 indica un ritardo. Nel dominio della frequenza, la (5) implica
   $$G_R(f) = G_T^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}. \tag{5}$$

2. *ISI nulla*

   L'ISI è nulla se la funzione $g(t) := g_T(t) \star g_R(t)$ [1] ha uno spettro $G(f)$ che soddisfa la condizione
   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = T_s. \tag{6}$$
   La condizione (6) è detta caratteristica di Nyquist ed è una condizione necessaria e sufficiente affinché l'ISI sia nulla. Si dice che un filtro che soddisfa la condizione (6) è un filtro con *caratteristica di Nyquist.*

Una possibile scelta della funzione $G(f)$, che soddisfa la condizione di Nyquist, è la seguente

$$G(f) = \begin{cases} T_s & 0 \le |f| \le \frac{1-\beta}{2T_s} \\ \frac{T}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{\pi T_s}{\beta}\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T_s}\right)\right]\right\} & \frac{1-\beta}{2T_s} \le |f| \le \frac{1+\beta}{2T_s} \\ 0 & |f| > \frac{1+\beta}{2T_s} \end{cases} \tag{7}$$

[1] Il simbolo $\star$ indica la convoluzione tra due funzioni.

Il parametro β è detto *fattore di roll-off* e può variare tra i valori 0 e 1. Agendo su tale parametro, si può variare la banda di $g(t)$. In particolare, scegliendo $\beta = 0$ si ottiene la banda minima $(1/2T_s)$, mentre prendendo $\beta = 1$ si ottiene la banda massima $1/T_s$. Un filtro con funzione di trasferimento data dalla (7) è detto *filtro a coseno rialzato*. E' facile controllare che una funzione $G(f)$ data dalla (7) soddisfa la condizione di Nyquist.

La risposta impulsiva di un filtro a coseno rialzato è

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \frac{\cos(\pi\beta t/T_s)}{1 - 4\beta^2 t^2/T_s^2}. \tag{8}$$

Poiché, dalla (5), si ha

$$G(f) = G_T(f)G_R(f) = |\, G_T(f)\,|^2 \, e^{-j2\pi f T_s}, \tag{9}$$

affinché l'ISI sia nulla, il filtro in trasmissione deve avere una funzione di trasferimento il cui modulo deve essere la radice quadrata della $G(f)$ data dalla (7). Inoltre, il modulo della funzione di trasferimento del filtro in ricezione, $G_R(f)$, deve essere uguale a quello di $G_T(f)$. Il parametro t_0 che appare nella (5) sta ad indicare solo un ritardo, utile per garantire che i filtri siano fisicamente realizzabili[2].

3 Valor medio e spettro di densità di potenza

E' utile calcolare il valor medio e lo spettro di densità di potenza di un'onda PAM, per comprendere come le proprietà spettrali dipendono dalle proprietà della sequenza dei simboli e dalla scelta della funzione $g(t)$.

Calcolare direttamente lo spettro del segnale $x(t)$ dato dalla (3), oltre a non essere possibile in generale, sarebbe d scarsa utilità pratica perché sarebbe uno spettro condizionato ad una prefissata sequenza di numeri. Cambiando la sequenza, cambierebbe ovviamente lo spettro. Inoltre, una sequenza di numeri noti a priori non porta informazione e quindi non è interessante dal punto di vista della trasmissione di informazione. Per poter parlare di informazione, è necessario modellare i simboli trasmessi come variabili aleatorie, aventi assegnata densità di probabilità. In tal caso, l'onda PAM si scrive nel modo seguente

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(t - kT_s) \tag{10}$$

ed è un processo aleatorio. Per poter calcolare lo spettro di densità di potenza del processo $X(t)$ è necessario che l'onda PAM sia un processo stazionario ed ergodico.

Si può dimostrare che, se la sequenza di simboli è una sequenza stazionaria ed ergodica, l'onda PAM (10) è un processo *ciclo-stazionario*, di periodo T_s. Infatti, se si osserva il processo (10) ad istanti di tempo distanti un multiplo intero di T_s, ad esempio t_1 e $t_1 + lT_s$, si ottengono le variabili aleatorie

$$X_1 := X(t_1) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(t_1 - kT_s) \tag{11}$$

$$X_2 := X(t_1 + lT_s) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(t_1 - (k - l)T_s) \tag{12}$$

Se si effettua, su X_2, un cambio di indici, ponendo $m = k - l$, si ottiene

$$X_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{m+l} g(t_1 - mT_s). \tag{13}$$

Essendo la sequenza di simboli stazionaria, la sequenza $\{A_{m+l}\}$ ha le stesse proprietà statistiche della sequenza $\{A_k\}$. Di conseguenza X_2 ha le stesse proprietà statistiche di X_1. Ciò prova la ciclo-stazionarietà del primo ordine di $X(t)$. Estendendo tale ragionamento alle statistiche di ordine superiore, si può dimostrare che $X(t)$ è

[2] Si ricorda che la fisica realizzabilità di un filtro richiede che il filtro abbia risposta impulsiva identicamente uguale a zero, per istanti di tempo negativi.

un processo ciclo-stazionario in senso stretto.

E' noto che, dato un processo $X(t)$, ciclo-stazionario in senso stretto, di periodo T_s, il processo $X(t-\Theta)$, con Θ variabile aleatoria distribuita uniformemente in un periodo temporale di T_s secondi, è un processo stazionario in senso stretto. Possiamo quindi considerare il processo

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k g(t - kT_s - \Theta). \tag{14}$$

In sommario, se i) la sequenza di simboli $\{A_k\}$ è una sequenza stazionaria in senso stretto ed ergodica e ii) Θ è una variabile aleatoria, indipendente dai simboli, avente densità di probabilità

$$p_\Theta(\theta) = \frac{1}{T_s} \operatorname{rect}_{T_s}(\theta), \tag{15}$$

il processo $X(t)$ in (14) è un processo stazionario in senso stretto ed ergodico.

Sotto le ipotesi precedenti possiamo quindi calcolare il valor medio e lo spettro di densità del processo $X(t)$.

Valor medio

Il valor medio di $X(t)$ può essere calcolato, sfruttando l'ergodicità del processo, come il valore atteso di $X(t)$. Indicando con m_A il valor medio dei simboli A_k, il valor medio di $X(t)$ è

$$E\{X(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_k g(t - kT_s - \Theta)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_k\} E\{g(t - kT_s - \Theta)\}, \tag{16}$$

dove, nella seconda eguaglianza si è sfruttata l'indipendenza statistica tra i simboli e la variabile Θ. Ponendo $E\{A_k\} = m_A$ e calcolando esplicitamente il valor medio di $g(t - kT_s - \Theta)$, si ottiene quindi[3]

$$E\{X(t)\} = m_A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - kT_s - \theta) p_\Theta(d\theta) d\theta = \frac{m_A}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} g(t - kT_s - \theta) d\theta. \tag{18}$$

Ponendo, nell'ultimo integrale, $u = t - kT_s - \theta$, si ottiene

$$E\{X(t)\} = \frac{m_A}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{t-kT_s-T_s/2}^{t-kT_s+T_s/2} g(u) du. \tag{19}$$

Poiché la funzione integranda non dipende dall'indice di sommatoria, k, la somma degli integrali effettuati su intervalli adiacenti, non sovrapposti, di durata T_s, è uguale all'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ di $g(u)$, per cui

$$m_X := E\{X(t)\} = \frac{m_A}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = \frac{m_A}{T_s} G(0). \tag{20}$$

Questa espressione, pur nella sua semplicità, ci indica che, per avere un'onda PAM a media nulla, possiamo o generare simboli a media nulla (per cui $m_A = 0$) oppure, indipendentemente dai simboli, possiamo usare una $g(t)$ ad area nulla.

[3] Si ricorda che il valor atteso di una funzione di una variabile aleatoria, ad esempio $f(\Theta)$, avente densità di probabilità $p_\Theta(\theta)$, è pari a

$$E\{f(\Theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) p_\Theta(\theta) d\theta. \tag{17}$$

Spettro di densità di potenza

Lo spettro di densità di potenza di $X(t)$ può essere calcolato, sfruttando l'ergodicità del processo, come il valore atteso di $X(t)X(t+\tau)$. Utilizzando la (14), e sfruttando l'indipendenza dei simboli dalla variabile Θ, si ottiene

$$\begin{aligned} E\{X(t)X(t+\tau)\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{A_k A_m\} E\{g(t-kT_s-\Theta)g(t+\tau-mT_s-\Theta)\} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_A(m-k) \int_{-T_s/2}^{T_s/2} g(t-kT_s-\theta)g(t+\tau-mT_s-\theta)\, d\theta \end{aligned} \tag{21}$$

avendo sfruttato la stazionarietà dei simboli, per cui $E\{A_k A_m\} = R_A(m-k)$. Effettuando ora il cambio di indici, per cui al posto dell'indice m, poniamo $n = m-k$, si ottiene

$$E\{X(t)X(t+\tau)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n) \int_{-T_s/2}^{T_s/2} g(t-kT_s-\theta)g(t+\tau-(n+k)T_s-\theta)\, d\theta. \tag{22}$$

Ponendo ora $u = t-kT_s-\theta$ e scambiando l'ordine di integrazione, si ottiene

$$E\{X(t)X(t+\tau)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{t-kT_s-T_s/2}^{t-kT_s+T_s/2} g(u)g(u+\tau-nT_s)\, du. \tag{23}$$

Di nuovo, la somma degli integrali, rispetto all'indice k, è eguale all'integrale da $-\infty$ a $+\infty$, per cui

$$E\{X(t)X(t+\tau)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n) \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(u+\tau-nT_s)\, du. \tag{24}$$

E' facile osservare che l'integrale che appare nell'equazione precedente è uguale all'auto-correlazione della funzione $g(t)$, calcolata nel punto $\tau - nT_s$. Di conseguenza, possiamo scrivere

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n) R_G(\tau-nT_s). \tag{25}$$

Lo spettro di densità di potenza, pari alla trasformata di Fourier di $R_X(\tau)$, vale quindi

$$S_X(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n)|G(f)|^2\, e^{-j2\pi nT_s f} = \frac{1}{T_s}\, |G(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n)\, e^{-j2\pi nT_s f}. \tag{26}$$

Introducendo lo spettro di densità di potenza discreto dei simboli

$$S_A(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A(n)\, e^{-j2\pi nT_s f}, \tag{27}$$

lo spettro di densità di potenza dell'oda PAM si può scrivere, più semplicemente, come

$$S_X(f) = \frac{1}{T_s}\, |G(f)|^2\, S_A(f). \tag{28}$$

Casi particolari

Consideriamo ora il caso particolare in cui i simboli siano scorrelati, ma con valore atteso m_A diverso da zero. In tal caso, indicando con m_A e σ_A^2 la media e la varianza dei simboli, rispettivamente, la correlazione dei simboli assume la forma

$$R_A(n) = \begin{cases} m_A^2 + \sigma_A^2 & n = 0 \\ m_A^2 & n \neq 0. \end{cases} \tag{29}$$

Sostituendo tale espressione nella (27), si ottiene[4]

$$S_A(f) := \sigma_A^2 + m_A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n T_s f} = \sigma_A^2 + \frac{m_A^2}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right). \tag{30}$$

Inserendo la (30) nella (28), si ottiene

$$S_X(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_s}|G(f)|^2 + \frac{m_A^2}{T_s^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|G\left(\frac{n}{T_s}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right). \tag{31}$$

E' interessante notare come lo spettro di densità di potenza di un'onda PAM a valor medio diverso da zero sia costituita da una parte continua, la cui intensità dipende dalla varianza dei simboli, più una parte cosiddetta "a righe", cioè costituita solo da impulsi matematici uniformemente spaziati in frequenza, la cui intensità dipende dal valor medio dei simboli. Si può infine controllare che, nel caso in cui i simboli non siano variabili aleatorie, per cui $\sigma_A^2 = 0$, lo spettro di densità di potenza assume la forma caratteristica dei segnali deterministici periodici.

Infine, come caso particolare di (31), è utile osservare che lo spettro di densità di potenza di un'onda PAM a simboli scorrelati e valor medio nullo, vale

$$S_X(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_s}|G(f)|^2 . \tag{32}$$

[4] In (30) si è sfruttata l'identità

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n T_s f} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right).$$