

Università di Roma "La Sapienza"  
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

**DALLA TEORIA DEI CAMPI  
ELETTROMAGNETICI AL MODELLO  
DI CIRCUITO A COSTANTI  
CONCENTRATE**

Seminario interdisciplinare del corso di  
Teoria dei Circuiti 1 - I modulo  
Docente: Prof. Raffaele Parisi

# INDICE

- 1- Descrizione del fenomeno elettromagnetico  
(grandezze fisiche, parametri e relazioni costitutive, eq. Maxwell)
- 2- Problema fondamentale dell'elettromagnetismo  
(approccio campistico e circuitale)
- 3- Ipotesi di costanti concentrate (enunciati e limiti di validità)
- 4- Conseguenze dell'ipotesi di costanti concentrate  
(suddivisione in regioni tipiche)
- 5- Modello del circuito a costanti concentrate  
(caratterizzazione con  $V$  ed  $I$ , leggi di Kirchhoff, relazioni costitutive)

## BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

- G. MARTINELLI - M. SALERNO:  
*"Fondamenti di Elettrotecnica"* - Vol. I - pp. 22-32
- E. DI CLAUDIO:  
*"Introduzione alla Teoria dei Circuiti"* - PP. 14-38

# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico

- Il fenomeno elettromagnetico è dovuto all'esistenza delle **cariche elettriche**
- Una **struttura spaziale** contenente corpi diversi (ambiente eterogeneo) è sede di fenomeni e.m. quando è **sollecitata dall'esterno**



## Trasformazioni energetiche

- Per una caratterizzazione quantitativa occorre introdurre:
  - a) Grandezze fisiche appropriate
  - b) Parametri rappresentativi dei corpi
  - c) Relazioni costitutive dei materiali
  - d) Equazioni di Maxwell

# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

## a) GRANDEZZE FISICHE:

→  
 **$\vec{E}$  CAMPO ELETTRICO** [Volt/metro]

determinato da una distribuzione di cariche

→  
 **$D$  INDUZIONE ELETTRICA** [Coulomb/m<sup>2</sup>]

determinato dall'interazione di  $\vec{E}$  con un materiale elettrico

→  
 **$H$  CAMPO MAGNETICO** [Amperspira/m]

determinato da cariche in movimento

→  
 **$B$  INDUZIONE MAGNETICA** [Weber/m<sup>2</sup>]

determinato dall'interazione di  $\vec{H}$  con un materiale magnetico

→  
 **$J$  DENSITÀ DI CORRENTE DI CONDUZIONE** [Ampere/m<sup>2</sup>]

legata al moto delle cariche

# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

## PROPRIETÀ DELLE GRANDEZZE FISICHE

- Le grandezze fisiche sono tutte di tipo vettoriale
- Sono descritte da opportuni modelli matematici e possono essere determinate con metodi analitici, sperimentali o numerici

# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

## b) PARAMETRI CHE CARATTERIZZANO I MATERIALI:

$\epsilon$  COSTANTE DIELETTICA o PERMETTIVITÀ [Farad/m]


$\mu$  PERMEABILITÀ MAGNETICA [Henry/m]

$g$  CONDUCTIBILITÀ [ $\Omega^{-1}/m$ ]

$\rho$  DENSITÀ SPAZIALE DI CARICA [Coulomb/m<sup>3</sup>]

### IPOTESI:

Hp 1: ISOTROPIA  quantità scalari

Hp2: LINEARITÀ, PERMANENZA ed OMOGENEITÀ  indipendenti dallo stato e.m., dal tempo e dal punto.



**COSTANTI SCALARI**

# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

c) RELAZIONI COSTITUTIVE (CORPI O MATERIALI SEMPLICI):

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{R1}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{R2}$$

$$\vec{J} = g(\vec{E} - \vec{E}_0) + \vec{J}_0 \quad \text{R3}$$

$\vec{E}_0$  e  $\vec{J}_0$  rappresentano le **ECCITAZIONI ESTERNE**  
(trasformazioni energetiche)

$r$  (densità di carica) può essere considerata **SORGENTE INTERNA**

# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

d) EQUAZIONI DI MAXWELL:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

M1

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

M2

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

M3

$$\text{div } \vec{D} = r$$

M4

Equazioni  
indipendenti

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  : densità corrente  
magnetica di  
spostamento

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  : densità corrente  
elettrica di  
spostamento



# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

- Le equazioni di Maxwell costituiscono il modello matematico fondamentale (di massima sintesi) del fenomeno e.m.
- Ogni variazione temporale di un campo in un punto presuppone l'esistenza, o la variazione temporale, del campo complementare nello stesso punto

## CHIUSURA ANALITICA DEL PROBLEMA E.M.:

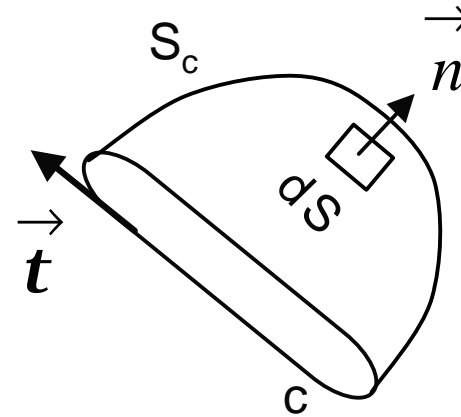
- 5 incognite  $( \overset{\rightarrow}{E}, \overset{\rightarrow}{D}, \overset{\rightarrow}{H}, \overset{\rightarrow}{B} e \overset{\rightarrow}{J} )$
- 5 equazioni  $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ equazioni indipendenti (M1 e M2)} \\ 3 \text{ relazioni costitutive} \end{array} \right.$

# 1-Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

## RICHIAMO SU TEOREMI E RELAZIONI VETTORIALI

### TEOR. DI STOKES (DEL ROTORE):

$$\iint_{S_c} \text{rot } \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} dS = \oint_c \vec{\Gamma} \cdot \vec{t} dc$$



Applicato ad M1 ed M2  
fornisce:

$$M1') \quad \oint_c \vec{E} \cdot \vec{t} dc = - \iint_{S_c} \frac{\iint \vec{B}}{\iint t} \cdot \vec{n} dS$$

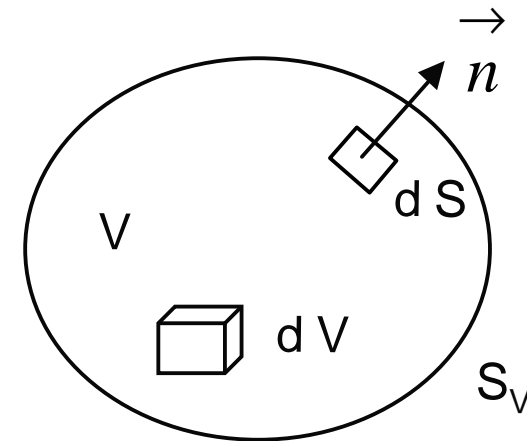
$$M2') \quad \oint_c \vec{H} \cdot \vec{t} dc = \iint_{S_c} \frac{\iint \vec{D}}{\iint t} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_c} \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

Circuitazioni di  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$

# 1 - Descrizione del fenomeno elettromagnetico (continua...)

## TEOR. DELLA DIVERGENZA:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\Gamma} dV = \iint_{S_V} \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} dS$$



Applicato ad M3 ed M4  
fornisce:

$$M3') \quad \iint_{S_V} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

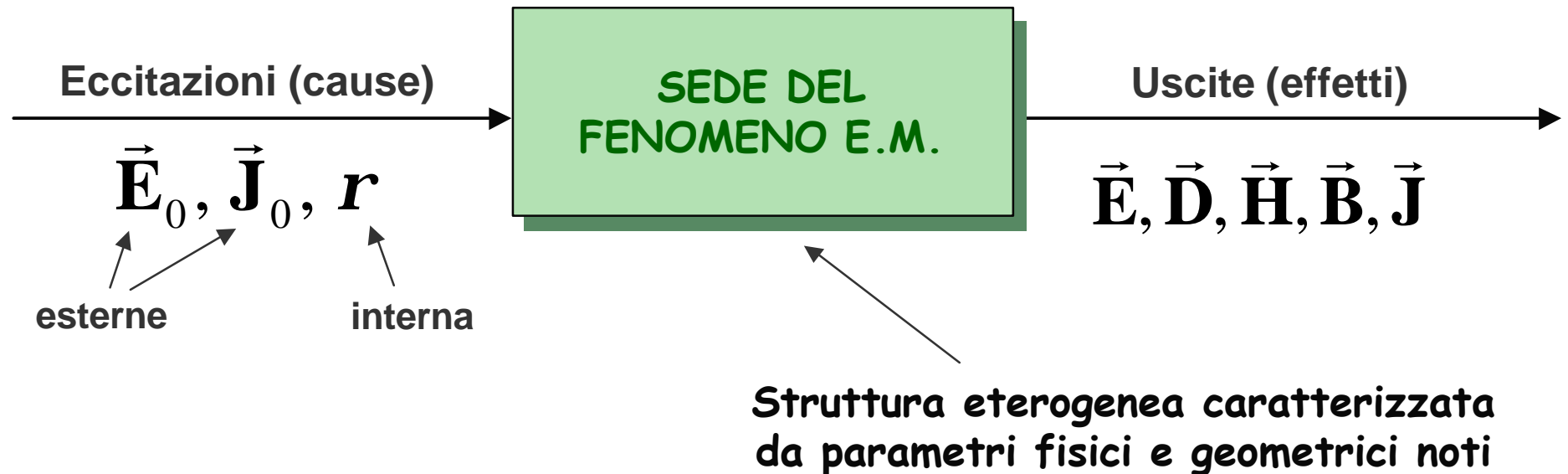
Flussi di  $\vec{B}$  e  $\vec{D}$

$$M4') \quad \iint_{S_V} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \rho dV$$

## DIVERGENZA DEL ROTORE:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\Gamma} = 0 \quad \forall \vec{\Gamma}$$

## 2- IL PROBLEMA FONDAMENTALE DELL'E.M.: LA SOLUZIONE CAMPISTICA E QUELLA CIRCUITALE



Due possibili approcci alla soluzione, distinti ma complementari:

- 1) Campistico
- 2) Circuitale

## 2- IL PROBLEMA FONDAMENTALE DELL'E.M.: LA SOLUZIONE CAMPISTICA E QUELLA CIRCUITALE (cont. ...)

### 1) Approccio della teoria dei campi

Studio della dinamica del sistema sulla base delle equazioni di Maxwell (considerazione diretta dei parametri introdotti e delle grandezze specifiche di campo).

L'individuazione delle grandezze fisiche può essere molto complessa.

⇒ **Ipotesi semplificative:**

**Linearità:** applicazione del principio sovrapposizione effetti

**Caso quasi-statico magnetico:**  $\frac{\oint \vec{B}}{\oint \vec{t}} = 0$

**Caso quasi-statico elettrico:**  $\frac{\oint \vec{D}}{\oint \vec{t}} = 0$

**Caso statico:**  $\frac{\oint \vec{B}}{\oint \vec{t}} = \frac{\oint \vec{D}}{\oint \vec{t}} = 0$

## 2- IL PROBLEMA FONDAMENTALE DELL'E.M.: LA SOLUZIONE CAMPISTICA E QUELLA CIRCUITALE (cont. ...)

### 2) Approccio della teoria dei circuiti

Si impongono limitazioni su:

- **frequenze di lavoro**

(campi e.m. lentamente variabili)

- **natura dei componenti**

(presenza in un componente di un solo fenomeno e.m. per volta, tempo-invarianza delle sue caratteristiche, ecc.)

## 2- IL PROBLEMA FONDAMENTALE DELL'E.M.: LA SOLUZIONE CAMPISTICA E QUELLA CIRCUITALE (cont. ...)

### 2) Approccio della teoria dei circuiti (cont. ...)

Si ottiene una grande **semplificazione** nella trattazione del problema e.m.:

- Le grandezze **vettoriali** ( $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{J}$ ) sono sostituite da grandezze **scalari** ( $V, I$ ).
- Le **Equazioni di Maxwell** sono sostituite dalle **Leggi di Kirchhoff** (topologiche)
- L'ambiente eterogeneo, sede del fenomeno e.m., è rappresentato da un **circuito**: ente astratto privo di dimensioni fisiche e soggetto solo a proprietà topologiche (grafo)

### 3- L'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE ENUNCIATI e LIMITI DI VALIDITÀ

- Tre diverse formulazioni (con conseguenze diverse):

#### 1) **Assenza di dimensioni:**

Le dimensioni geometriche della struttura sede del fenomeno e.m. sono sufficientemente piccole da poter essere trascurate

→ **APPROCCIO TOPOLOGICO**

#### 2) **Velocità infinita:**

La velocità di propagazione del fenomeno e.m. può considerarsi infinita

→ **INDIVIDUAZIONE DI REGIONI TIPICHE** (corpi o elementi costitutivi dove è presente un solo fenomeno alla volta)

#### 3) **Assenza di ritardi:**

Il tempo di trasmissione del fenomeno e.m. da un punto all'altro della struttura può considerarsi nullo

→ **VERIFICA DI VALIDITÀ DELL'IPOTESI DI C.C.**



### 3- L'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE ENUNCIATI e LIMITI DI VALIDITÀ (continua)

- Limiti di validità (uso enunciato 3):

$f_{max}$  : estremo superiore delle bande di frequenza dei campi e.m. presenti, rappresentati nel dominio delle frequenze tramite Fourier (è una quantità nota)

$t_{min} = \frac{1}{2f_{max}}$  : minimo intervallo di tempo apprezzabile (massima rapidità di variazione temporale dei campi e.m. presenti)

$L$  : dimensione geometrica massima della struttura (nota)

$c$  : velocità di propagazione del campo e.m. nella struttura (nel vuoto = velocità della luce)

$t_{trasm} \leq \frac{L}{c}$  : tempo impiegato dal campo per propagarsi da un punto all'altro della struttura

### 3- L'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE ENUNCIATI e LIMITI DI VALIDITÀ (continua)

#### VERIFICA DELLA VALIDITÀ DELL'IPOTESI:

$$t_{trasm} \ll t_{min} \rightarrow \frac{L}{c} \ll \frac{1}{2f_{max}} \rightarrow$$

$$2 \frac{L}{c} f_{max} \ll 1$$

Con la lunghezza  
d'onda:

$$L \ll \lambda_{min}$$

- Le dimensioni fisiche della struttura sede del fenomeno e.m. devono essere trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda minima (campo a banda più larga) in gioco.

### 3- L'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE ENUNCIATI e LIMITI DI VALIDITÀ (continua)

#### VALIDITÀ IPOTESI C.C. - ESEMPI

ES. 1) Amplificatore HI-FI:

$$f_{max} \simeq 20\text{kHz} ; L \simeq 1\text{m} ; c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$2 \frac{L}{c} f_{max} \simeq \frac{2 \cdot 1[\text{m}] \cdot 20 \cdot 10^3 [\text{s}^{-1}]}{3 \cdot 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]} = 1.3 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

**AMPIAMENTE  
VERIFICATA**

$$\text{Oppure: } l_{\min} = \frac{c}{2f_{\max}} = \frac{3 \cdot 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]}{20 \cdot 10^3 [\text{s}^{-1}]} = 7500 [\text{m}] \gg 1 [\text{m}]$$

**AMPIAMENTE  
VERIFICATA**

### 3- L'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE ENUNCIATI e LIMITI DI VALIDITÀ (continua)

ES. 2) Dispositivo a microonde:

$$f_{max} \simeq 2GHz ; L \simeq 0.1m$$

$$2 \frac{L}{c} f_{max} \simeq \frac{2 \cdot 0.1[m] \cdot 2 \cdot 10^9 [s^{-1}]}{3 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]} \simeq 1.3 > 1$$

**NON  
ACCETTABILE!**

Oppure: 
$$l_{min} = \frac{3 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]}{2 \cdot 2 \cdot 10^9 [s^{-1}]} = 0.075[m] < 0.1[m]$$

**NON  
ACCETTABILE!**

### 3- L'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE ENUNCIATI e LIMITI DI VALIDITÀ (continua)

ES. 3) Rete distribuzione energia elettrica:

$$f_{max} = 50 \text{ Hz} ; L \geq 100 \text{ Km}$$

$$2 \frac{L}{c} f_{max} \approx \frac{2 \cdot 10^5 [m] \cdot 50 [s^{-1}]}{3 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]} \approx 0.03 < 1$$

**IPOTESI  
ACCETTABILE**

$$l_{min} = \frac{3 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]}{2 \cdot 50 [s^{-1}]} = 3.000 \text{ Km} > 100 \text{ Km}$$

**IPOTESI  
ACCETTABILE**

- In questo caso la validità dell'ipotesi non è evidente: per reti di distribuzione di dimensione geografica potrebbe anche non essere verificata

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE

Entro il **limite di validità** dell'ipotesi di costanti concentrate, **verificabile** tramite l'**enunciato 3** (assenza di ritardi), si può derivare il **modello circuitale a cost. conc.**

- Dall'**enunciato 1** (assenza di dimensioni): le proprietà del modello si riducono a quelle puramente **topologiche**
- Dall'**enunciato 2** (istantaneità): la struttura eterogenea sede del fenomeno e.m. può essere suddivisa in **regioni semplici** di pochi tipi. Infatti:
  - Legame tra velocità di propagazione del campo e.m. e materiali presenti (parametri costitutivi,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{m}}}$$

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI COSTANTI CONCENTRATE (continua...)

Se l'ipotesi è verificata, in confronto a tutte le altre grandezze in gioco si può pensare  $c \rightarrow \infty$  e quindi:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{m} \rightarrow 0$$

⇒ Si hanno **tre casi**, che individuano tre tipologie di regioni semplici:

$$I) \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} = 0 \quad (\text{con cinque sottocasi})$$

$$II) \quad \mathbf{e} = 0 \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{m} \neq 0$$

$$III) \quad \mathbf{e} \neq 0 \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{m} = 0$$

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

REGIONE I

$$\mathbf{e} = \mathbf{m} = 0$$

- A partire dal vettore di Poynting ( $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ ) si definiscono le seguenti densità volumetriche di energia:

$$\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (\text{elettrica}) \qquad \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (\text{magnetica})$$

- Poiché (dalle prime due relaz. cost.)  $\vec{D} = \mathbf{e} \vec{E} = 0$  e  $\vec{B} = \mathbf{m} \vec{H} = 0$

si ha (dal punto di vista energetico):  $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = 0$

➔ La regione I è priva di energia elettrica e magnetica immagazzinata



## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

Dalle Equazioni di Maxwell:

da M4)  $\vec{D} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \rho = 0$  non c'è accumulo di cariche

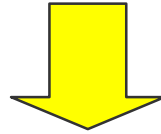
da M2)  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{J} = 0$  ( $\vec{J}$  è "solenoidale")

e perciò (Teo. Divergenza):  $\int_V \operatorname{div} \vec{J} = \int_{S_V} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = I = 0$

➔ Corrente di conduzione entrante = corr. di cond. uscente  
(è definita univocamente la corrente  $I$  in tutta la regione  $I$ )

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

$$\vec{B} = 0$$



- : da M1)  $\text{rot } \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}$  irrotazionale (ciclico o conservativo)

e perciò (Teo. Stokes):  $\oint_c \vec{E} \cdot \vec{t} \, dc = 0 \rightarrow \exists V = \int_c \vec{E} \cdot \vec{t} \, dc$  (differenza di potenziale)

➔ In tutta la regione I è univocamente definita la differenza di potenziale  $V$  tra due punti

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

- Dalla terza relaz. costitutiva  $\vec{J} = \mathbf{g} \left( \vec{E} - \vec{E}_0 \right) + \vec{J}_0$  derivano ulteriori proprietà che individuano **5 sottoregioni**, a seconda della presenza o meno delle eccitazioni e del valore di  $\mathbf{g}$ .
- Dal punto di vista energetico, si definisce la **densità volumetrica di potenza elettrica**:  
$$\vec{J} \cdot \vec{E}$$

(è dovuta alle correnti di conduzione e fornisce una misura dei fenomeni di trasformazione energetica)

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

### IA) VUOTO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 = \vec{J}_0 = 0 \text{ (nessuna eccitazione)} \\ \mathbf{g} = 0 \quad \text{(conducibilità nulla)} \end{array} \right. \longrightarrow \vec{J} = \mathbf{g} \vec{E} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{J} \cdot \vec{E} = 0$$

➔ Non passa corrente di conduzione e non c'è dissipazione di potenza

### IB) CONDUTTORE PERFETTO:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 = \vec{J}_0 = 0 \\ \mathbf{g} = \infty \quad \text{(conducibilità infinita)} \end{array} \right. \longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\mathbf{g}} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{J} \cdot \vec{E} = 0$$

➔ Potenziale costante in ogni punto (regione equipotenziale) e non c'è potenza elettrica dissipata

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

### IC) REGIONE RESISTIVA:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 = \vec{J}_0 = 0 \\ \mathbf{g} \neq 0 \quad (\text{conducibilità finita}) \end{array} \right. \longrightarrow \vec{J} = \mathbf{g} \vec{E} \neq 0 \quad \text{e} \quad J \cdot \vec{E} = \mathbf{g} |\vec{E}|^2 = \frac{|\vec{J}|^2}{\mathbf{g}} \neq 0$$

- ➔ È presente una corrente di conduzione e c'è dissipazione di potenza (trasformazione irreversibile di energia elettrica in altra forma: effetto Joule)

### ID) GENERATORE INDIPENDENTE DI CORRENTE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \vec{J}_0 \neq 0 \quad (\text{finita}) \\ \mathbf{g} = 0 \end{array} \right. \longrightarrow \vec{J} = \vec{J}_0 \quad \text{e} \quad \vec{J}_0 \cdot \vec{E} \neq 0$$

- ➔ La regione imprime una corrente  $\mathbf{I}_0$  ed è sede di trasformazioni reversibili di energia non elettrica in energia elettrica.

(Nota: quando  $\vec{J}_0 = 0$  si ha il vuoto IA)

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

### IE) GENERATORE INDIPENDENTE DI TENSIONE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 \neq 0 \text{ (finito) e } \vec{J}_0 = 0 \\ \mathbf{g} = \infty \end{array} \right. \longrightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 \text{ e } \vec{J}_0 \cdot \vec{E} \neq 0$$

(Nota: quando  $\vec{E}_0 = 0$  si ha il conduttore perfetto IB)

➔ È impressa una d.d.p.  $V_0$  e c'è una trasformazione reversibile di energia

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

REGIONE II)

$$\mathbf{e} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{m} \neq 0$$

- Prime due rel. cost.:  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = 0$  e  $\vec{B} = \mathbf{m} \vec{H} \neq 0 \rightarrow \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \neq 0$ 
  - ➔ È presente energia magnetica immagazzinata
- Essendo  $\vec{D} = 0$  : da M4) ed M2)  $\rightarrow \mathbf{r} = 0$  e  $\vec{J}$  solenoidale
  - ➔ Anche in questo caso: corrente entrante = corrente uscente (corrente I definita univocamente in tutta la regione II)

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

- Essendo  $\vec{B} \neq 0$  : da M1)  $\text{rot } \vec{E} = -\mathbf{m} \frac{\vec{H}}{t}$
- $\vec{E}$  risulta quindi **non conservativo**
  - ➔ **Non è univoca la d.d.p.  $V$  all'interno della regione II**
- La **regione II** (di tipo magnetico) è costituente essenziale degli elementi ideali:
  - **Induttore**
  - **Induttori mutuamente accoppiati**
  - **Trasformatore**



## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

REGIONE III)

$$\mathbf{e} \neq 0 \quad \mathbf{m} = 0$$

- Poiché  $\vec{D} = \mathbf{e} \vec{E} \neq 0$  e  $\vec{B} = \mathbf{m} \vec{H} = 0$  si ha  $\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \neq 0$   
➔ È presente energia elettrica immagazzinata
- Essendo  $\vec{D} \neq 0$  : da M4)  $\text{div} \vec{D} = \mathbf{r} \neq 0$  può esserci **accumulo di cariche** al suo interno

$$\text{da M2) } \text{rot} \vec{H} = \frac{\text{rot} \vec{D}}{\mathbf{m}} + \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \text{div rot} \vec{H} = \frac{\text{div} \vec{D}}{\mathbf{m}} + \text{div} \vec{J} = 0$$

e quindi...

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

- ... per il teorema di Continuità o Principio di Conservazione delle cariche elettriche:

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\mathcal{I} \mathbf{r}}{\mathcal{I} t} \quad \longrightarrow \quad \vec{J} \quad \text{non è solenoidale}$$

- ➔ Corrente entrante diversa dalla corrente uscente  
(occorre tener conto della corrente di spostamento)

Teo. Divergenza:  $\int_V \operatorname{div} \vec{J} = \int_{S_V} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I} t} \int_V \mathbf{r} dV \rightarrow I = -\frac{\mathcal{I} q}{\mathcal{I} t}$

## 4 - CONSEGUENZE DELL'IPOTESI DI C.C. (continua...)

- Essendo  $\vec{B} = 0$ , da M1)  $\text{rot } \vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{E}$  conservativo

➔ È definita in modo univoco la d.d.p.  $V$  in tutta la regione III

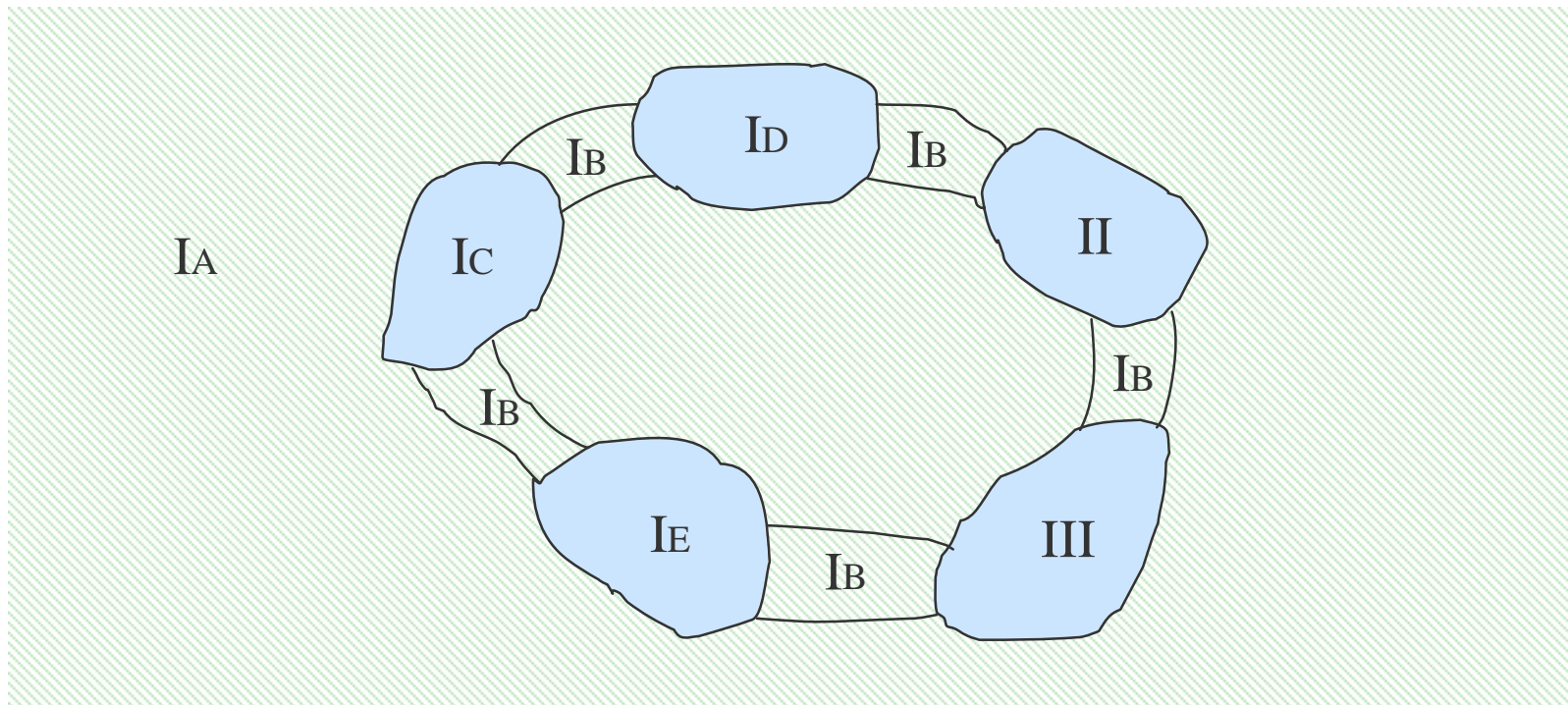
- La **regione III** (di tipo elettrico) è costituente essenziale dell'elemento ideale:
  - **Condensatore**

(Nota: solo nella regione III si può avere accumulo di cariche)

**NOTE:** È da rimarcare il **basso numero** di **elementi semplici** ricavati. Casi più complessi (misti) possono essere ottenuti a partire da essi. È inoltre possibile ricavare il **circuito magnetico** in modo del tutto analogo.

## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE

- Verificata l'ipotesi di c.c. (enunciato 3) ed individuate le **regioni tipiche** (enunciato 2), la struttura eterogenea sede del fenomeno e.m. può essere schematizzata tramite **corpi elementari semplici** che immettono le **eccitazioni** (regioni  $I_D$  ed  $I_E$ ) o in cui avvengono fenomeni di un solo tipo ( $I_C$ , **II**, **III**), **connessi** tra di loro tramite **conduttori perfetti** ( $I_B$ ), il tutto immerso nel **vuoto** ( $I_A$ ).
- Le **dimensioni geometriche** dei corpi sono **trascurabili** (enunciato 1).



## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua ...)

**NOTA 1:** Lo schema introdotto può apparire “non fisico”, ma l'obiettivo è quello di giustificare il modo pratico (cioè valido operativamente) in cui vengono costruiti i circuiti elettrici, non di studiare e descrivere il comportamento e.m. dei materiali nel modo più generale possibile

**NOTA 2:** La concentrazione dei fenomeni elettromagnetici all'interno di singole regioni opportune può essere vista come una condizione di “robustezza” del modello. [Di Claudio p. 21]

## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua...)

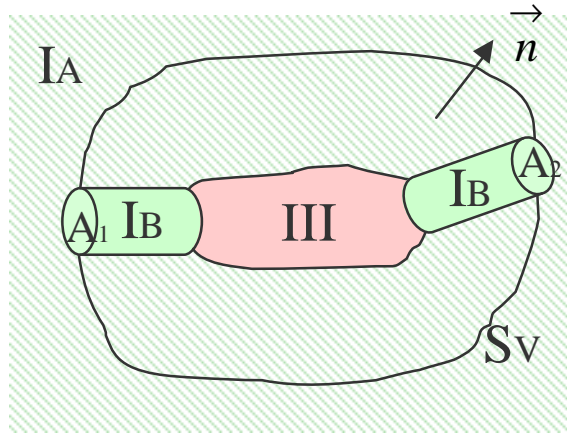
- Per la completa formalizzazione del modello circuitale occorre ancora dimostrare che:
  - A** - I corpi presenti possono essere caratterizzati da due variabili scalari di interfaccia: **tensione  $V$**  ("grandezza agli estremi") e **corrente  $I$**  ("grandezza attraverso")
  - B** -  $V$  ed  $I$  soddisfano le leggi di equilibrio di Kirchhoff (K1 e K2)
  - C** - Le  $V$  ed  $I$  che caratterizzano gli elementi ideali individuati ( $I_C$ ,  $I_D$ ,  $I_E$ , II e III) sono messe in relazione tramite opportune equazioni costitutive

## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua...)

A - Si ha che:

- Le regioni di connessione  $I_B$  (morsetti) sono equipotenziali ( $\vec{E} = 0$ ) e non c'è accumulo di cariche ( $\text{div} \vec{D} = \mathbf{r} = 0$ ).
  - In  $I_A$  (vuoto) è definita una d.d.p. ( $\vec{E}$  conservativo) e non si accumulano cariche.
- Si può parlare in modo univoco di tensione  $V$  applicata ad un elemento ideale ( $I_C, I_D, I_E, II$  e  $III$ ) come d.d.p. tra i suoi due morsetti  $I_B$ .
- Si può parlare in modo univoco di corrente  $I$  che attraversa un elemento ideale. Infatti:...

## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua...)



Superficie chiusa  $S_V$  di volume  $V$  che racchiude un elemento ideale e attraversa solo il vuoto  $I_A$  ed i due morsetti  $I_B$  (non deve passare all'interno della regione III)

- Da M4) e Teo. della Div.: 
$$\int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_{S_V} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \mathbf{r} dV = q = 0 \quad (\text{Gauss})$$

$$(\vec{D} = \mathbf{e} \vec{E} = 0)$$

- Da M2) e Teo. Div.: 
$$\text{div } \text{rot } \vec{H} = 0 = \text{div } \vec{J} \quad \int_V \text{div } \vec{J} dV = \int_{S_V} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = 0$$

→ la corrente complessiva che passa attraverso  $S_V$  è nulla.

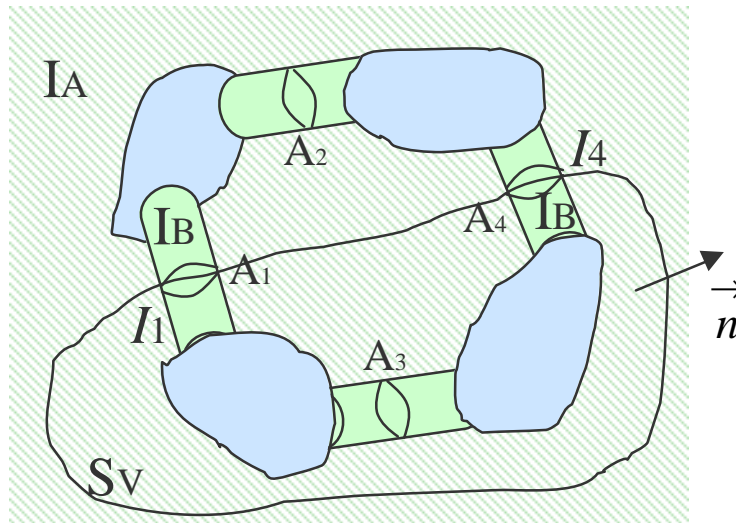
➤ Poiché in  $I_A$  risulta  $\vec{J} = 0$ , la corrente scorre tutta attraverso le sezioni di  $I_B$  di area  $A_1$  ed  $A_2$ : **corrente entrante = corrente uscente**



## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua...)

B Si ha che:

### K1 - LEGGE DI EQUILIBRIO DELLE CORRENTI



Superficie chiusa  $S_V$  che passa nel vuoto  $I_A$  e nei morsetti  $I_B$  (dove  $\vec{J}$  è solenoidale) racchiudendo un numero arbitrario di elementi ideali

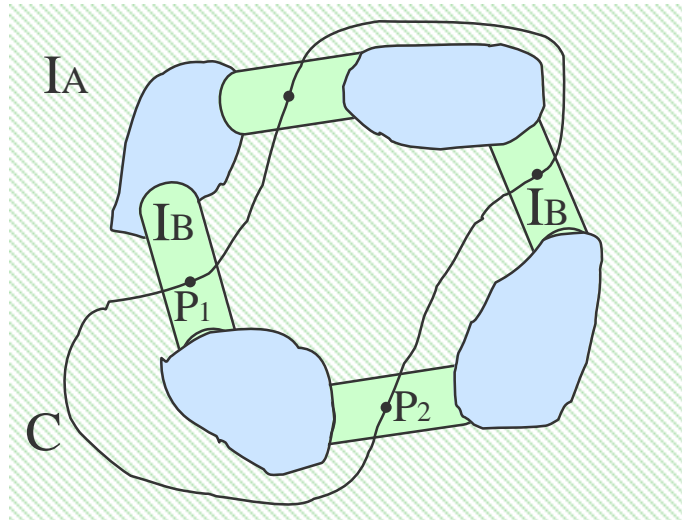
Risulta: 
$$\int_V \text{div} \vec{J} dV = \int_{S_V} \vec{J} \cdot \vec{n} dS =$$

$$\sum_i I_i = 0$$

dove  $I_i$  è la corrente che passa attraverso la sezione  $A_i$

## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua...)

### K2 - LEGGE DI EQUILIBRIO DELLE TENSIONI



Curva chiusa  $C$  (circuitazione) all'interno di  $I_A$  e  $I_B$  che interessi un numero arbitrario di elementi ideali passando in corrispondenza dei loro morsetti (entrambi).

- Essendo:  $rot E = 0$  ( $E$  conservativo) all'interno di  $I_A$  ed  $I_B$ :

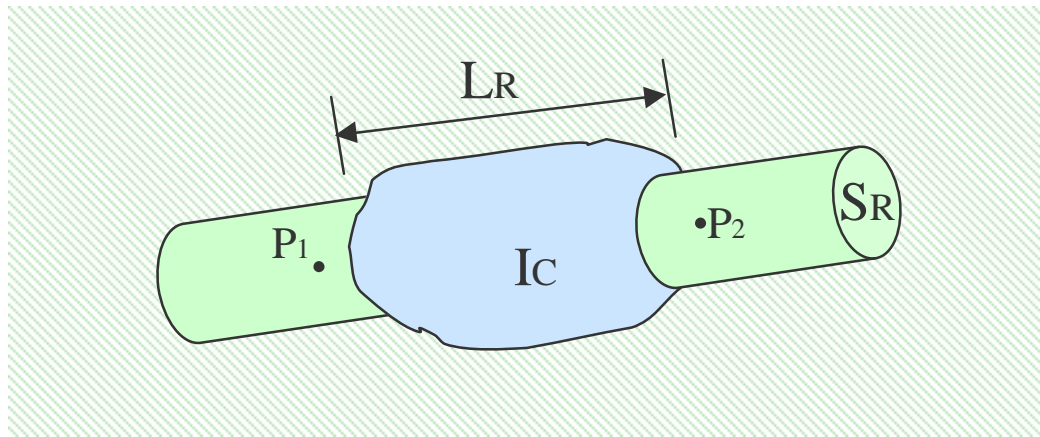
$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{t} \, dc = \sum_i V_i = 0$$

dove  $V_i$  è la d.d.p. tra i due morsetti dell'elemento  $i$ -mo

$$\text{Es.: } V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{t} \, dc$$

## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua...)

C Si ricava la relazione costitutiva nel caso della regione di tipo resistivo  $I_c$  (Resistore):



$$\vec{E} \text{ conservativo} \xrightarrow{\text{tensione}} \begin{matrix} \vec{rot} \vec{E} = 0 \\ \vec{E} \end{matrix} \quad V_R = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{t} \, dc = E_o \cdot L_R$$

TEOREMA  
DELLA MEDIA

$$\vec{J} = \mathbf{g} \vec{E} \xrightarrow{\text{corrente}} I_R = \int_{S_R} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = \mathbf{g} E_1 \cdot S_R$$

TEOREMA  
DELLA MEDIA

## 5 - MODELLO DEL CIRCUITO A COSTANTI CONCENTRATE (continua...)

$$\frac{V_R}{I_R} = \frac{E_o L_R}{g E_1 S_R} = R \quad \text{RESISTENZA } [\Omega] \text{ unico parametro caratteristico}$$

$$R = \frac{E_o}{E_1} \cdot \frac{L_R}{g S_R} = h_R \frac{r L_R}{S_R} \quad \begin{array}{l} h_R : \text{fattore di forma} \\ r = 1/g : \text{resistività} \end{array}$$

- Per campo uniforme si ha  $h_R = 1 \rightarrow$

$$R = r L_R / S_R$$

- In pratica  $h_R \cong 1$  : il modello è semplice e robusto  
(bassa criticità realizzativa del resistore)