

Capitolo 3 – Acustica degli ambienti chiusi

Indice

- Teoria modale
- Modi normali in ambienti rettangolari
- Trattazione statistica
- Riverberazione

Introduzione (1)

- Il *suono* è il risultato di una perturbazione ondulatoria che viene generata e si propaga nell'aria, interagendo con i confini dell'ambiente e gli oggetti in esso contenuti.
- La *sensazione uditiva* è legata in misura essenziale alle caratteristiche dell'ambiente.
- Non è attualmente possibile descrivere analiticamente il comportamento acustico di un *ambiente reale*, ma si possono introdurre dei modelli di calcolo semplificati.

Introduzione (2)

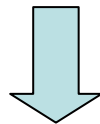
La validità di un modello dipende essenzialmente dal rapporto tra lunghezza d'onda e dimensioni dell'ambiente.

N.B.:

$$f = 20 \text{ Hz} \quad \longrightarrow \quad \lambda = 17 \text{ m}$$

$$f = 20 \text{ kHz} \quad \longrightarrow \quad \lambda = 1,7 \text{ cm}$$

Il campo sonoro all'interno di un ambiente limitato da pareti (almeno parzialmente) riflettenti potrebbe essere calcolato come sovrapposizione di *tutte* le onde riflesse.



costo computazionale elevato

Teoria modale

- La *teoria modale* consente di ottenere una soluzione in forma chiusa al problema della propagazione di onde sonore in ambienti chiusi.
- Si basa sulla risoluzione dell'equazione delle onde (*equazione di Helmholtz*) con le opportune condizioni al contorno.
- In pratica è applicabile solo a geometrie molto semplici.
- E' comunque importante per una comprensione non superficiale del fenomeno sonoro, e per la validazione dei modelli semplificati.

Equazione di Helmholtz

Il punto di partenza è l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Si fa l'ipotesi di un'onda piana armonica:

$$p(x, t) = \bar{p} e^{j(\omega t - kx)}$$

L'equazione assume la forma:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0$$

**Equazione di Helmholtz
omogenea**

in cui $k = \omega/c$.

Condizioni al contorno (1)

Le condizioni al contorno si trovano applicando l'equazione di Eulero in corrispondenza delle pareti.

L'equazione di Eulero è:

$$\text{grad } p = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

e può essere scritta per la componente u_n della velocità normale alla parete:

Componente normale del gradiente \longrightarrow $(\text{grad } p)_n = -\rho_0 j \omega u_n$


Condizioni al contorno (2)

u_n può essere quindi espressa in funzione dell'impedenza Z della parete:

$$u_n = \frac{p}{Z}$$

Si ottiene:

Derivata
direzionale


$$Z \frac{\partial p}{\partial n} + j\omega\rho_0 p = 0$$

Normalizzando rispetto all'impedenza caratteristica dell'aria ($\hat{Z} = Z / \rho_0 c$):

$$\hat{Z} \frac{\partial p}{\partial n} + jkp = 0$$

**Condizione al
contorno**

Soluzioni dell'equazione di Helmholtz

Si può dimostrare che l'equazione di Helmholtz con le opportune condizioni al contorno fornisce soluzioni non banali (cioè non nulle) solo per particolari valori di k , che sono chiamati *autovalori*.

Ogni autovalore k_n corrisponde ad un'*autofunzione* $p_n(\mathbf{r})$, che rappresenta un'onda stazionaria in tre dimensioni, o *modo normale* della stanza. Sotto opportune condizioni le autofunzioni sono mutuamente ortogonali:

$$\iiint_V p_n(\mathbf{r}) p_m(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} K_n & \text{per } n = m \\ 0 & \text{per } n \neq m \end{cases}$$

Equazione di Helmholtz non omogenea (1)

La conoscenza di k_n e $p_n(\mathbf{r})$ consente di valutare quantitativamente le proprietà acustiche di un ambiente, per esempio la risposta permanente ad una sorgente sonora.

Si supponga di considerare il caso di sorgenti sonore distribuite uniformemente nell'ambiente secondo una funzione di densità di velocità $q(\mathbf{r})$ ($q(\mathbf{r})dV$ è quindi la velocità del volume elementare dV).

Si supponga inoltre che le sorgenti siano caratterizzate da un'unica pulsazione ω .

Equazione di Helmholtz non omogenea (2)

L'equazione di continuità in assenza di sorgenti:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}$$

si può scrivere anche:

$$\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\partial t}$$

Per tenere conto della presenza di sorgenti si aggiunge un termine a secondo membro:

$$\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 q(\mathbf{r})$$

Equazione di Helmholtz non omogenea (3)

In tal caso l'equazione di Helmholtz diventa:

$$\nabla^2 p + k^2 p = -j\omega\rho_0 q(\mathbf{r})$$

Equazione di Helmholtz non omogenea

Si considera lo sviluppo di $q(\mathbf{r})$ in serie di autofunzioni:

$$q(\mathbf{r}) = \sum_n C_n p_n(\mathbf{r})$$

I coefficienti dello sviluppo sono dati da:

$$C_n = \frac{1}{K_n} \iiint_V p_n(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}) dV$$

Equazione di Helmholtz non omogenea (4)

Analogamente per la soluzione $p_\omega(\mathbf{r})$:

$$p_\omega(\mathbf{r}) = \sum_n D_n p_n(\mathbf{r})$$

L'obiettivo è calcolare i coefficienti incogniti D_n in funzione dei coefficienti noti C_n . Sostituendo le espressioni trovate nell'equazione di Helmholtz si ottiene:

$$\sum_n D_n (\nabla^2 p_n + k^2 p_n) = j\omega\rho_0 \sum_n C_n p_n$$

Equazione di Helmholtz non omogenea (5)

Poiché $\nabla^2 p_n + k_n^2 p_n = 0$ uguagliando uno ad uno i termini delle sommatorie si ottiene:

$$D_n = j\omega\rho_0 \frac{C_n}{k^2 - k_n^2}$$

Nel caso semplice di una sorgente puntiforme posizionata in \mathbf{r}_0 e caratterizzata dalla velocità di volume Q si ha che $q(\mathbf{r})$ è una “funzione” delta:

$$q(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Equazione di Helmholtz non omogenea (6)

In questa situazione i coefficienti C_n sono dati da:

$$C_n = \frac{1}{K_n} \iiint_V p_n(\mathbf{r}) q(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{K_n} Q p_n(\mathbf{r}_0)$$

e la soluzione ha la forma:

$$p_\omega(\mathbf{r}) = jQ\omega\rho_0 \sum_n \frac{p_n(\mathbf{r})p_n(\mathbf{r}_0)}{K_n(k^2 - k_n^2)} \quad \text{Funzione di Green}$$

N.B.: la funzione trovata è simmetrica rispetto al punto di osservazione e alla posizione della sorgente (proprietà di *reciprocità*).

Equazione di Helmholtz non omogenea (7)

Gli autovalori sono in generale quantità complesse:

$$k_n = \frac{\omega_n}{c} + j \frac{\delta_n}{c}$$

La soluzione diventa (si trascura δ_n^2):

$$p_\omega(\mathbf{r}) = jQc^2\omega\rho_0 \sum_n \frac{p_n(\mathbf{r})p_n(\mathbf{r}_0)}{K_n(\omega^2 - \omega_n^2 - 2j\delta_n\omega_n)}$$

Questa espressione è la **funzione di trasferimento** della stanza tra \mathbf{r} e \mathbf{r}_0 . Le quantità ω_n sono le *autofrequenze* della stanza (o *frequenze di risonanza*), mentre δ_n sono i *fattori di smorzamento*.

Equazione di Helmholtz non omogenea (8)

Se la sorgente non emette una sinusoide pura, ma un segnale che contiene diverse componenti spettrali, si ricorre alla rappresentazione tramite la trasformata di Fourier. In tal caso $Q=Q(\omega)$ rappresenta la densità spettrale della velocità di volume.

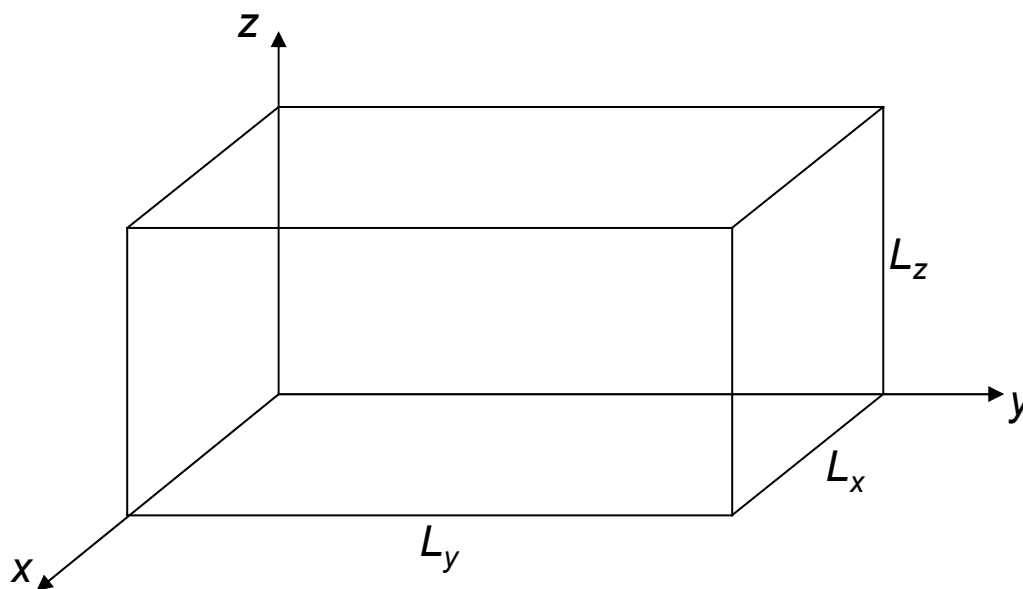
La soluzione complessiva sarà data da:

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\omega}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} d\omega$$

e nell'espressione di $p_{\omega}(\mathbf{r})$ si dovrà usare $Q(\omega)$.

Modi normali in stanze rettangolari (1)

Si consideri una stanza con pareti parallele a coppie, essendo le coppie ortogonali fra loro (*stanza rettangolare*). Tale geometria semplificata è la più vicina alla forma degli ambienti reali (sale da concerto, chiese, uffici, sale per conferenza, teatri ecc.) e assume rilevanza sia teorica che pratica.



Modi normali in stanze rettangolari (2)

Si suppone che le pareti siano *rigide*, cioè le componenti normali della velocità si annullano in corrispondenza delle pareti.

In coordinate cartesiane l'equazione di Helmholtz si scrive:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0$$

La soluzione generale si può scrivere separando le variabili:

$$p(x, y, z) = p_1(x)p_2(y)p_3(z)$$

Modi normali in stanze rettangolari (3)

L'equazione di Helmholtz si separa in tre equazioni differenziali ordinarie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 p_1}{dx^2} + k_x^2 p_1 = 0 \\ \frac{d^2 p_2}{dy^2} + k_y^2 p_2 = 0 \\ \frac{d^2 p_3}{dz^2} + k_z^2 p_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{con le condizioni} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dx} = 0 \quad \text{per } x = 0 \text{ e } x = L_x \\ \frac{dp_2}{dy} = 0 \quad \text{per } y = 0 \text{ e } y = L_y \\ \frac{dp_3}{dz} = 0 \quad \text{per } z = 0 \text{ e } z = L_z \end{array} \right. \quad \text{al contorno:}$$

Le nuove costanti sono legate dalla relazione:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

Modi normali in stanze rettangolari (4)

La soluzione dell'equazione:

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} + k_x^2 p_1 = 0$$

ha la seguente forma generale:

$$p_1(x) = A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)$$

in cui le costanti A_1 e B_1 dipendono dalle condizioni al contorno. In particolare la condizione di derivata nulla in $x=0$ impone $B_1=0$. In $x=L_x$ si ha:

$$\left. \frac{dp_1}{dx} \right|_{x=L_x} = 0 \Rightarrow \sin(k_x L_x) = 0 \Rightarrow k_x L_x = n_x \pi$$

Modi normali in stanze rettangolari (5)

Estendendo alle tre dimensioni, si deve avere:

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}; \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}; \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}$$

Gli autovalori k delle soluzioni si ottengono dalla relazione:

$$k_{n_x n_y n_z} = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

mentre le autofunzioni sono:

$$p_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = C \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right)$$

con C costante arbitraria.

Modi normali in stanze rettangolari (6)

L'espressione:

$$p_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = C \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right)$$

rappresenta un'onda stazionaria o *modo normale* (o *naturale*). Ogni modo è quindi individuato da una terna di numeri interi positivi (*numeri modal*).

La dipendenza dal tempo della pressione viene rappresentata aggiungendo il termine $e^{j\omega t}$.

N.B. La forma trovata vale solo nell'ipotesi di pareti rigide (cioè velocità normale alla parete nulla e ampiezza di pressione massima). Tale condizione è tuttavia verificata con buona approssimazione anche in presenza di dissipazione delle superfici.

Modi normali in stanze rettangolari (7)

Ricorrendo alla notazione complessa (formula di Eulero) l'espressione precedente si scrive anche:

$$p_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \frac{C}{8} \sum \exp \left[j\pi \left(\pm \frac{n_x}{L_x} x \pm \frac{n_y}{L_y} y \pm \frac{n_z}{L_z} z \right) \right]$$

Ognuno degli otto termini della sommatoria rappresenta un'onda piana che si muove lungo una direzione definita dagli angoli che essa forma con i tre assi coordinati. Tali angoli si trovano con le relazioni:

$$\cos \beta_x = \pm \frac{n_x}{L_x}; \quad \cos \beta_y = \pm \frac{n_y}{L_y}; \quad \cos \beta_z = \pm \frac{n_z}{L_z}$$

Modi normali in stanze rettangolari (8)

Si possono distinguere:

- *modi assiali*, in cui la propagazione avviene in una direzione parallela ad un asse coordinato. Hanno un solo numero modale non nullo, per esempio $(n_x, 0, 0)$.
- *modi tangenziali*, in cui la propagazione avviene su direzioni che appartengono a piani paralleli ai piani coordinati. Un solo numero modale è nullo, per esempio $(n_x, n_y, 0)$.
- *modi obliqui*, in cui la propagazione avviene secondo direzioni oblique rispetto agli assi coordinati.

Modi normali in stanze rettangolari (9)

Considerando l'espressione:

$$p_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = C \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right)$$

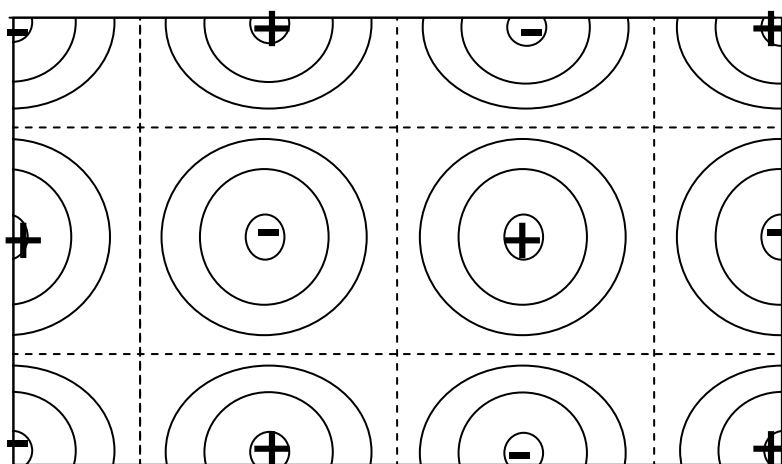
si verifica che in ogni istante la pressione si annulla nei punti (*nodi*):

$$\frac{n_x \pi}{L_x} x = \frac{\pi}{2} + m\pi = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (2m+1) \frac{L_x}{2n_x}$$

e analogamente per le altre coordinate.

Modi normali in stanze rettangolari (10)

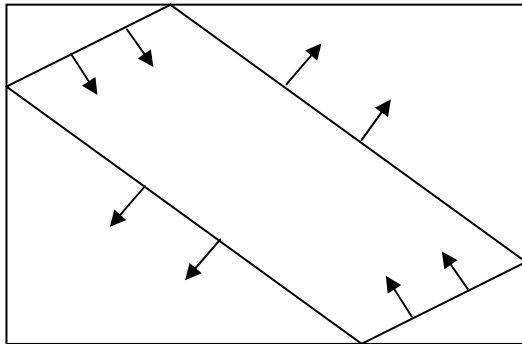
I punti in cui la pressione è sempre nulla formano tre insiemi di piani equidistanti ortogonali fra loro (*piani nodali*). n_x , n_y e n_z sono il numero di piani nodali ortogonali agli assi x , y e z rispettivamente.



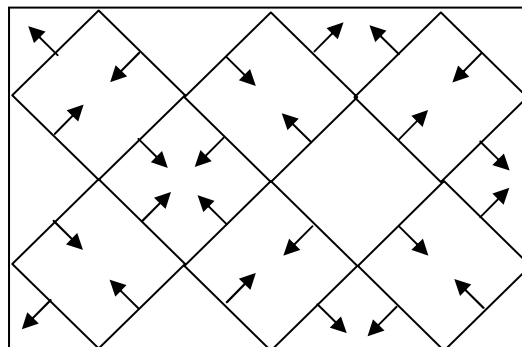
Distribuzione della pressione sonora nel piano $z=0$ nel caso $n_x=3$, $n_y=2$.
Le linee tratteggiate sono le intersezioni dei piani nodali con $z=0$. Ai lati di queste linee la pressione ha segni opposti.

Modi normali in stanze rettangolari (11)

Esempi



Onde piane nel caso $n_x=1$,
 $n_y=1$, $n_z=0$.



Onde piane nel caso $n_x=3$,
 $n_y=2$, $n_z=0$.

Modi normali in stanze rettangolari (12)

Le *autofrequenze* corrispondenti agli autovalori $k_{n_x n_y n_z}$ sono date da:

$$f_{n_x n_y n_z} = \frac{c}{2\pi} k_{n_x n_y n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2}$$

Per una stanza di dimensioni $L_x=4,7$ m, $L_y=4,1$ m, $L_z=3.1$ m si ottengono le seguenti autofrequenze:

f_n	n_x	n_y	n_z
36,17	1	0	0
41,46	0	1	0
54,84	0	0	1
55,02	1	1	0
65,69	1	0	1
68,55	0	1	1
....			

Modi normali in stanze rettangolari (13)

La relazione:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

nello spazio di k_x , k_y e k_z rappresenta geometricamente una sfera di raggio k e volume $4\pi k^3/3$. I valori di interesse sono quelli contenuti nel primo ottante, di volume $\pi k^3/6$.

Le distanze del generico punto (k_x, k_y, k_z) dai suoi vicini nelle tre direzioni sono π/L_x , π/L_y , π/L_z rispettivamente, a cui corrisponde un volume $\pi^3/(L_x L_y L_z) = \pi^3/V$, essendo V il volume geometrico della stanza.

Modi normali in stanze rettangolari (14)

Il numero N_f di autofrequenze comprese fra 0 e $f=kc/2\pi$ sarà:

$$N_f = \frac{\pi k^3 / 6}{\pi^3 / V} = \frac{Vk^3}{6\pi^2} = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3$$

mentre la *densità modale* (in frequenza) sarà:

$$\frac{dN_f}{df} = 4\pi V \frac{f^2}{c^3} \text{ Hz}^{-1}$$

Si può dire che alle basse frequenze pochi modi contribuiscono alla pressione sonora, che quindi varia molto da punto a punto. Alle alte frequenze invece la densità modale è elevata e le variazioni spaziali di pressione sono minori.

Modi normali in stanze rettangolari (15)

La formula trovata per N_f è in realtà una approssimazione, in quanto sottostima i contributi dei modi assiali e tangenziali. Una espressione più esatta è la seguente:

$$N_f = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3 + \left(\frac{\pi}{4} S \left(\frac{f}{c} \right)^2 + \frac{L f}{8 c} \right)$$

Questi termini sono trascurabili nel caso di grandi ambienti

in cui S è l'area totale delle pareti e L è la somma degli spigoli.

Modi normali in stanze rettangolari (16)

Esempio 1

Si consideri di nuovo la stanza con dimensioni $L_x=4,7$ m, $L_y=4,1$ m, $L_z=3.1$ m. Il suo volume è $59,7$ m³. Supponendo di considerare la frequenza limite $f=116$ Hz si trova:

$$N_f = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3 \approx 10$$

$$N_f = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3 + \frac{\pi}{4} S \left(\frac{f}{c} \right)^2 + \frac{L}{8} \frac{f}{c} \approx 20$$

cioè nel caso di stanze piccole e basse frequenze non si possono trascurare i modi assiali e trasversali.

Modi normali in stanze rettangolari (17)

Esempio 2

Si supponga $L_x=50$ m, $L_y= 24$ m, $L_z=14$ m ($V=16800$ m³, una sala da concerto). Per una frequenza massima $f=10$ kHz si trova:

$$N_f = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3 \approx 1,8 \times 10^9$$

$$\frac{dN_f}{df} = 4\pi V \frac{f^2}{c^3} = 5400$$

cioè si hanno 5400 modi per Hz (0,0002 Hz in media tra un modo e il successivo)!

Modi normali in stanze rettangolari (18)

L'espressione:

$$N_f = \frac{4\pi}{3} V \left(\frac{f}{c} \right)^3$$

per $f \rightarrow \infty$ vale anche per stanze di forma arbitraria. Infatti una stanza qualsiasi può essere pensata come l'unione di (infinite) stanze rettangolari, per ciascuna delle quali si può applicare la relazione scritta. Il numero di modi sarà la somma dei numeri di modi di ciascuna stanza componente (linearità in V).

Modi normali in stanze rettangolari (19)

Come notato, se la frequenza del segnale emesso dalla sorgente è bassa, la pressione è determinata da pochi modi. All'aumentare della frequenza, il numero di modi aumenta rapidamente.

Al di sopra di una frequenza caratteristica (*frequenza di Schroeder*) ha senso una trattazione statistica della pressione sonora, che si può quindi considerare una variabile aleatoria la cui densità di probabilità non dipende più dalla geometria e dalle proprietà fisiche dell'ambiente.

frequenza di Schroeder

$$f_S \approx \frac{5000}{\sqrt{V \langle \delta_n \rangle}} \approx 2000 \sqrt{\frac{T_R}{V}}$$

tempo di riverbero

valore medio della costante di smorzamento

Modi normali in stanze rettangolari (20)

Per grandi ambienti, la frequenza di Schroeder è dell'ordine di 20 o 30 Hz, quindi non ha senso calcolare le autofrequenze (elevata densità modale).

Per piccoli ambienti invece la banda di frequenze al di sotto di f_S è significativa e quindi le proprietà acustiche sono determinate da poche autofrequenze.

In particolare il numero di modi compresi tra 0 a f_S è:

$$N_{f_S} \approx 900 \sqrt{\frac{T_R^3}{V}}$$

Modi normali in stanze rettangolari (21)

Per esempio in una stanza di 200 m³ con un tempo di riverbero di 1s (un'aula), il comportamento acustico è dominato da 60-70 frequenze al di sotto della frequenza di Schroeder (circa 140 Hz). Ciò significa che in un certo senso l'acustica degli ambienti piccoli è più complicata di quella degli ambienti grandi!

La relazione:

$$f_s \approx \frac{5000}{\sqrt{V \langle \delta_n \rangle}} \approx 2000 \sqrt{\frac{T_R}{V}}$$

può essere utilizzata per distinguere gli ambienti tra “grandi” e “piccoli”:

Ovviamente dipende dalla frequenza

$$V > V_s \approx \left(\frac{2000}{f} \right)^2 T_R$$

Modi normali in stanze rettangolari (22)

- In conclusione, si può dire che la descrizione modale è importante soprattutto per gli ambienti piccoli e le basse frequenze.
- Per quanto riguarda la geometria, la forma cubica è la peggiore perché le frequenze di risonanza dei modi assiali coincidono, causando forti irregolarità spaziali del livello di pressione sonora. Tale comportamento origina una “colorazione” sgradevole della voce e della musica (enfasi su alcune basse frequenze, corrispondenti all’eccitazione di modi coincidenti isolati).

Trattazione statistica (1)

Si consideri una sorgente sonora che emette un tono sinusoidale a frequenza $f (= \omega/2\pi)$.

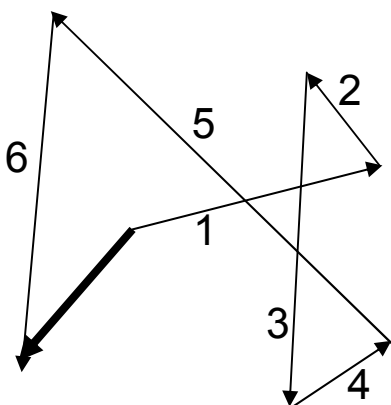
La pressione sonora a regime in un punto qualsiasi è descritta da una funzione del tipo:

$$P_{\omega} = \sum_n \frac{A_n}{\omega^2 - \omega_n^2 - 2j\delta_n\omega_n}$$

in cui i coefficienti A_n dipendono dalla posizione della sorgente, del ricevitore e dalla frequenza.

Trattazione statistica (2)

Si supponga $f > f_S$ (frequenza di Schroeder). In tal caso la risposta è la somma dei contributi di un numero molto elevato di modi, le cui fasi sono distribuite casualmente.



Ogni vettore rappresenta un termine della sommatoria della pagina precedente.


Poiché le varie componenti si possono considerare indipendenti, si può applicare il teorema del limite centrale alla parte reale e alla parte immaginaria del vettore risultante.

Trattazione statistica (3)

Per $f > f_S$ quindi la quantità:

$$y = \frac{|p^2|}{\langle |p^2| \rangle}$$

valore medio del modulo
quadro della pressione

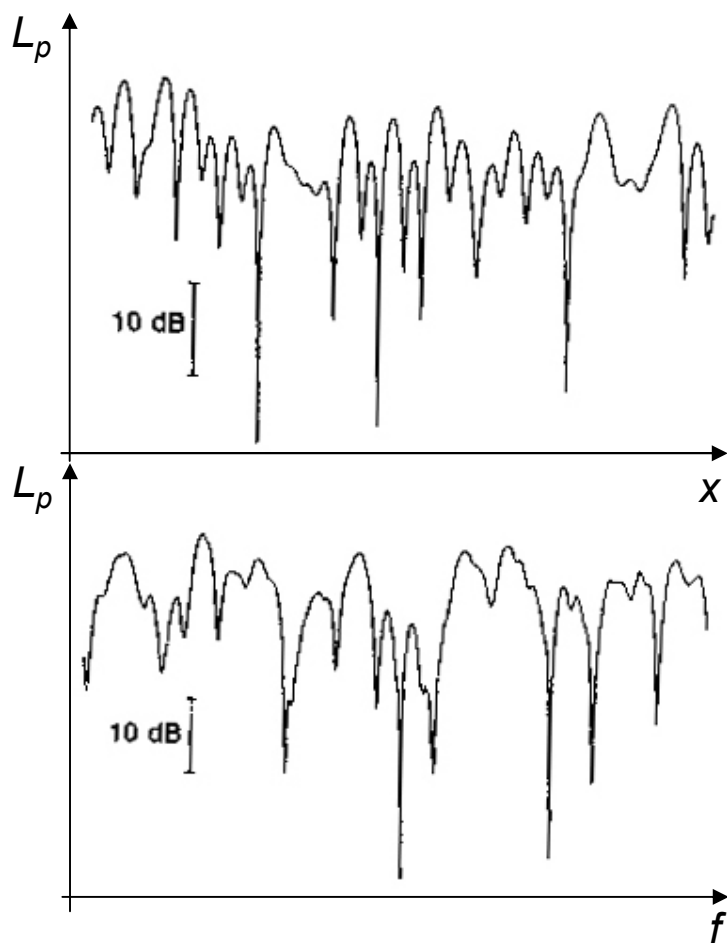


che è proporzionale alla densità di energia, ha una distribuzione di tipo esponenziale. Cioè si ha:

$$P(y > y_0) = \int_{y_0}^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-y_0}$$

Si noti che la distribuzione della densità di energia è indipendente dalla stanza considerata!

Trattazione statistica (4)



Andamento del livello di pressione sonora in una stanza, misurato lungo una linea retta, a frequenza di eccitazione costante (*risposta spaziale*).

Entrambe le curve sono caratterizzate da un andamento molto irregolare, con nulli molto profondi.

La presenza di massimi e minimi è dovuta alle particolari relazioni di fase tra i modi componenti.

Andamento del livello di pressione sonora misurato in un punto fisso, al variare della frequenza di eccitazione (*risposta in frequenza*).

Trattazione statistica (5)

In base a considerazioni statistiche si dimostra che la distanza media tra massimi adiacenti della risposta spaziale è data da:

$$\langle \Delta x_{\max} \rangle \approx 0,79 \lambda$$

mentre la distanza media tra massimi adiacenti della risposta in frequenza è:

$$\langle \Delta f_{\max} \rangle \approx \frac{4}{T_R}$$

Un'altra grandezza importante è la differenza di livello ΔL_{\max} tra il valore massimo e il valore medio della curva dell'energia in funzione della frequenza, all'interno di una certa banda B. Si trova:

$$\Delta L_{\max} \approx 4,34 \ln(\ln BT) \text{ dB}$$

Esempio

$$T_R = 2 \text{ s}, B = 0 \div 10 \text{ kHz} \quad \longrightarrow \quad \Delta L_{\max} = 10 \text{ dB}$$

Trattazione statistica (6)

Osservazioni

- Le proprietà generali delle funzioni di trasferimento (cioè la distribuzione dei valori assoluti, la profondità delle irregolarità, la sequenza di massimi e minimi, le variazioni di fase, ecc.) non dipendono dalla particolare stanza o dal punto di osservazione.
- Ciò è in contrasto con l'idea comune per cui una stanza “risponde bene” acusticamente se ha una risposta in frequenza il più possibile “regolare” (*smooth*), per diversi motivi:
 1. il parlato e la musica sono caratterizzati da variazioni così rapide che un ambiente grande non raggiunge quasi mai le condizioni di regime stazionario;
 2. il sistema uditivo umano non è in grado di percepire fluttuazioni rapide dello spettro di frequenza di un segnale.

Decadimento dei modi e riverberazione (1)

- La pressione sonora in regime permanente sinusoidale è una somma di sinusoidi alla stessa frequenza della sorgente, con ampiezze e fasi iniziali differenti. L'ampiezza è più elevata se la frequenza è prossima a una delle frequenze naturali.
- Se la sorgente si spegne nell'istante $t=0$, ciascun modo decade indipendentemente secondo una legge del tipo:

$$p_n(t) = p_n(0)e^{-\delta_n t} \cos(\omega_n t)$$

Solitamente non è possibile osservare il decadimento di un modo isolato, se non in particolari condizioni (basse frequenze).

Decadimento dei modi e riverberazione (2)

Il ***tempo di riverberazione*** T_R (introdotto da Sabine) consente di valutare la rapidità con cui il suono si estingue in un ambiente chiuso:

“si definisce *tempo di riverberazione* T_R il tempo necessario affinché il livello di pressione sonora in un punto decada di 60 dB, a partire dall’istante di disattivazione della sorgente”.

Secondo la definizione, il tempo di riverbero è definito per una *specific*a coppia sorgente-ricevitore, ma viene solitamente considerato come una misura *globale* delle proprietà acustiche di una stanza.

Decadimento dei modi e riverberazione (3)

Il tempo di riverberazione viene misurato sollecitando l'ambiente con rumore a banda larga (per eccitare tutti i modi) e mediando la pressione su bande diverse.

Per il singolo modo si ha:

$$p_n^2(t) = \frac{1}{2} p_n^2(0) e^{-2\delta_n t} [1 + \cos(2\omega_n t)]$$

Se si effettua la media temporale su un tempo T tale che:

$$T_n = \frac{\pi}{\omega_n} \ll T \ll \frac{1}{2\delta_n}$$

allora si ha:

$$\langle p_n^2(t) \rangle \approx \frac{1}{2} p_n^2(0) e^{-2\delta_n t}$$

Decadimento dei modi e riverberazione (4)

Se si passa al livello di pressione sonora L_p si trova un andamento lineare decrescente con t :

$$L_{p_n(t)} = 10 \log \frac{\langle p_n^2 \rangle}{p_0^2} = A - Bt$$

in cui B dipende dalla costante di smorzamento del modo. Quando si sommano i contributi di tutti i modi, si hanno dei fenomeni di modulazione (come nei battimenti) e si valuta allora la *pendenza media* della curva di decadimento.

N.B. In presenza di gruppi di modi con costanti di smorzamento molto diverse nella stessa banda di frequenze, si possono avere zone con pendenze medie diverse.

Decadimento dei modi e riverberazione (5)

Se è possibile fare riferimento ad un valore medio $\langle \delta \rangle$ della costante di smorzamento, si ottiene la definizione del tempo di riverberazione:

$$-60 = 10 \log e^{-2\langle \delta \rangle T_R} \Rightarrow T_R \approx \frac{6,91}{\langle \delta \rangle}$$

cioè il prodotto del tempo di riverberazione per lo smorzamento medio è circa costante.

I valori tipici di T_R vanno da 0,3s (il soggiorno di una casa) fino a 10s (grandi chiese). In pratica $\langle \delta \rangle$ è compreso tra 1 e 20 s^{-1} .

Per la maggior parte degli ambienti “grandi” si ha $0,7s < T_R < 2s$.

Conclusione

- La teoria modale, sviluppata nel caso di ambienti rettangolari con bassa dissipazione, è utile in pratica solo per la caratterizzazione di ambienti regolari di piccole dimensioni.
- Non può essere direttamente applicata ad ambienti reali qualsiasi (grandi e irregolari) per l'elevata complessità computazionale.
- L'equazione di Helmholtz non omogenea per ambienti non rettangolari con condizioni al contorno e sorgenti arbitrarie può comunque essere risolta numericamente (Metodi alle differenze finite, agli elementi finiti, agli elementi di contorno). Uno strumento numerico particolarmente efficiente è quello dell'acustica geometrica.